

Πέμπτο Τεστ Απειροστικός Λογισμός Ι

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Διάρκεια: 2 ώρες

ΘΕΜΑ 1

Να χαρακτηρίσετε με πλήρη αιτιολόγηση τους παρακάτω ισχυρισμούς ως **Αληθείς** ή **Ψευδείς**.

- i. Υπάρχει φραγμένη συνάρτηση $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ και συνεχής η οποία να μην έχει μέγιστη τιμή.
- ii. Αν $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$.
- iii. Υπάρχει $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ συνεχής συνάρτηση και επί.
- iv. Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και $f(0) < g(0)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) < g(x)$, για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.
- v. Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \\ 0, & x \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$ είναι ασυνεχής στο 0.

ΘΕΜΑ 2

- i. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής, 1-1 και επί συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$
- ii. Αν I είναι ένα διάστημα, αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{Q}$ είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 3

- i. Εξετάστε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 2x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, είναι συνεχής.
- ii. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Αν $A \neq \emptyset$ είναι ένα άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι $\sup f(A) = f(\sup A)$. Ισχύει το προηγούμενο αποτέλεσμα αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι η f είναι συνεχής;

ΘΕΜΑ 4

- i. Ας είναι $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f^2(x) = g^2(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$. Να αποδείξετε ότι είτε $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$, είτε $f(x) = -g(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$.
- ii. Να δώσετε παράδειγμα συνεχών συναρτήσεων $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f^2(x) = g^2(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε δεν ισχύει απαραίτητα το συμπέρασμα στο ερώτημα i .

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!

